PAOLO GRASSO
Socio corrispondente

FACCETTA NERA

La canzone, musicalmente non eccelsa, ma gradevole, esplose inaspettata ed era, nelle parole, un cumulo di luoghi comuni e di bugie. Pensate alle promesse che faceva ai poveri abissini che parevano smaniosi di diventare sudditi dell'Italia, «noi ti faremo diventare italiana» e ancora, «noi ti daremo un'altra legge e un altro re». Segue un'affermazione spudorata: «la nostra legge è schiavitù d'amore, è libertà di vita e di pensiero...» e poi una minaccia contenente il ricordo della sconfitta di Adua, con relativa vendetta: «Vendicheremo noi camice nere / gli eroi caduti e libereremo te». Nella retorica risorgimentale le sconfitte dovevano (chissà perché) essere una vergogna per il nemico vincente, che s'era permesso di affondare navi italiane a Lissa o di vincere a Custoza.

Poi vennero le sconfitte autentiche e la propaganda inventerà la scusa della superiorità del nemico, dimenticando che i veri provocatori eravamo noi.

Ma lasciamo stare i metodi propagandistici, senza perdere di vista il momento storico, perché, in una visione integrale, anche le canzoni ci aiutano a capire le condizioni politiche di un'epoca.

Leccatesi le ferite di un dopoguerra tumultuoso, il nostro paese si sentiva rassicurato dall'avvento al potere del fascismo che, almeno, faceva arrivare in orario i treni e aveva dato impulso ad importanti opere pubbliche, delle quali la più vistosa era il prosciugamento delle paludi pontine; la gioia di vivere esplose con una canzone ed un film dal titolo emblematico: *Vivere*!

Ritornano alla memoria alcune parole:

Vivere!
Sempre così giocondo!
Ridere
Delle follie del mondo!
Vivere
Finché c'è gioventù
Perché la vita è bella
E la voglio vivere sempre più!

La propaganda fascista voleva dare al mondo l'immagine di un'Italia forte, pacifica ed operosa e, mentre il Duce si faceva fotografare a torso nudo, intento a mietere il grano, si esaltava la vita dei campi, nella sua moralità. C'era però uno strano connubio tra il concetto di maschio conquistatore e la moralità della donna, ma non tutti allora lo avvertivano. La canzone emblematica fu *Campagnola bella*:

All'alba quando spunta il sole
Con le compagne se ne va...
Trotterellando l'asinella
La porta verso la città.

Oppure:

Voglio vivere così,
Col sole in fronte
E felice canto
Beatamente!
Voglio vivere e goder
L'aria del monte
Perché questo incanto
Non costa niente!

Un'Italia moralmente sana che cantava il boscaiolo tornante a sera al suo casolare, dove la moglie amorosa lo attendeva; l'amore eterno veniva promesso e giurato davanti a una chiesetta di campagna e i testi di certe canzoni contenevano autentici drammi sentimentali: il peggiore (letterariamente) romanticismo emanava dalle note di *Signorinella* con la pansé appassita nascosta tra le pagine del libro di latino di un ex studente, innamorato della dolce dirimpettaia: lo studente, conseguita la laurea, al suo paese fa il notaio...

Qui io son diventato
Il buon don Cesare
Porto il mantello a ruota
E fo il notaio.

Oppure i languori di *Come pioveva*; il canto conteneva la storia di un amore infranto e dell'incontro casuale di due ex innamorati:

Ed io pensavo ad un sogno lontano
Nella stanzetta dell'ultimo piano
E lei più forte al mio cuor si stringeva
Come pioveva... Come pioveva.

Erano piccoli drammi popolari, rappresentabili anche per i palati facili e riconducibili a quella che poi fu definita la sceneggiata, nella quale si cimentarono attori e cantanti poi divenuti famosi; tra questi ricordiamo perfino Beniamino Gigli, il più grande tenore dell'epoca, un monumento nazionale. Beniamino Gigli si rese famoso per una canzone popolarissima che conteneva la storia di una figlia che ritorna in seno alla famiglia, in seguito al grido di chiamata del padre:

Torna, piccina mia,
Torna dal tuo papà:
Egli ti aspetta sempre con ansietà.

E non poteva mancare la mamma. Nella versione buona è il figlio che grida la sua felicità perché torna dalla mamma:

Mamma son tanto felice
Perché ritorno da te...
Sento la mano tua stanca

Sopra i miei riccioli d'or...

Nella canzone in cui è presente invece una mamma cattiva, una bambina si lamenta:

Mamma, mormora la bambina,
Mentre pieni di pianto ha gli occhi.
Alla tua piccolina
Non compri mai balocchi.
Mamma tu compri soltanto profumi per te.

Ma quando la mamma, pentita, si decide a comprare i giocattoli, la bambina muore.

E non poteva mancare la mamma morente mentre il figlio è in prigione. Ovviamente è una canzone napoletana:

Io songo carcerato e mamma more,
Vurria murì pur'io prima e' stasera!
O carcerere mio, o carcerere,
Fammi la carità,
Fammi vedè mammà!

E a rendere più patetica la scena non si tratta di un delinquente comune, ma di un bravo giovane che ha perduto la libertà per 'na femmena bella.

C'è pure la struggente nostalgia dell'emigrante, che dalla nave vede la sua terra sempre più allontanarsi e intanto spunta la luna:

Ma quanno spunta a' luna
Luntane e Napule non si può star!

E intanto cresceva a Napoli una famiglia di grandi artisti, i De Filippo; ma non fanno parte di questa storia, non solo perché più recenti, ma anche perché più grandi.

E intanto gli anni passavano; il nostro impero conquistato e subito perduto; la guerra di Spagna e poi il conflitto mondiale con tutti i disastri che portò con sé.

Nelle canzoni del tempo di guerra c'era di tutto: i sommergibili che aspettavano la nave nemica per silurarla; il bambino che dorme mentre il papà veglia sulla vetta, la fratellanza (*sic*) italo-tedesca (*Camerata Richard*); ma la canzone di quegli anni, cantata da tutti i belligeranti, fu *Lili Marleen*; canto triste, come dolorosa e triste fu quella guerra. L'Italia ebbe una canzone che non è stata dimenticata: *Ma l'amore no!* Esprimeva la solidità di un amore che sapeva vincere l'età e le barriere del tempo:

Forse te ne andrai
D'altre donne le carezze cercherai...
E se tornerai
Già sfiorita ogni bellezza troverai in me!
Ma l'amore no...

Macerie, sterminio materiale e morale conseguenza di una lunga guerra che si chiuse con una pace sbilenca contenente i germi di nuove guerre.

Gli Americani, tra le tante cose, ci impongono anche i loro ritmi e le loro danze.

Il rock and roll furoreggia e la musica ai disusati orecchi sembra un rumore.

E *Faccetta nera*? Fu effimera come il nostro sogno coloniale: in Libia cercammo e trovammo l'acqua e non ci accorgemmo di camminare sul petrolio. Intanto l'Italia conosceva una nuova stagione musicale, con poeti-musici che non esito ad assimilare ai lirici greci. I loro nomi? Non c'è bisogno di citarli perché tutti li conoscono.

Addio, *Faccetta nera*.

Ai nuovi canti, densi di contenuto sociale, culturale e anche politico, si affiancarono ancora canzoni della vecchia maniera, gradevoli musicalmente e piene di buoni sentimenti. Esplode San Remo, Nilla Pizzi e altre concorrenti fanno volare le colombe e ringraziano dei fiori, ma un certo De Andrè ci racconta la morte del soldato Piero ed altri satireggiano sulle nostre condizioni economiche e politiche; anche la problematica religiosa si insinua nel campo della musica profana. *Faccetta nera*, e chi se la ricordava ormai!

GIUSEPPE VASTA

CURIOSITÀ SUI NUMERI NATURALI

Lo sapevate che esistono numeri naturali [1] detti *deficienti, abbondanti, perfetti, gemelli, amicabili, bizzarri, fidanzati, intoccabili, palindromi, pandigitali, eteromechi, triangolari, omogenei, planaci, di Kaprekar* e tanti altri che hanno delle proprietà curiose?

Se avrete un po' di pazienza scopriremo assieme alcuni di questi numeri tanto affascinanti.

Incominciamo questa breve esplorazione nel mondo dei numeri naturali, richiamando alcuni concetti elementari.

Dati due numerali *naturali* a e b (con b diverso da zero) se esiste un terzo numero *naturale* c che moltiplicato per b dà a si dice che b è un *divisore* di a e che a è divisibile per b.

Esempio

Dati i due numeri 12 e 3 si può dire che 3 è un divisore di 12 perché esiste un altro numero naturale 4 che moltiplicato per 3 dà come prodotto 12. Per quanto detto anche 4 è un divisore di 12. Ma anche 2 è un divisore di 12 perché esiste un numero naturale 6 che moltiplicato per 2 dà 12. Allora anche 6 è un divisore di 12. Anche 1 è un divisore di 12 perché esiste un numero 12 che moltiplicato per 1 dà 12. Di conseguenza anche 12 è un divisore di se stesso. In definitiva i divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

---

[1] I numeri naturali sono i numeri che si imparano a conoscere sin dalla scuola elementare, vale a dire i numeri: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e così via dicendo.

Si noti che tra i divisori di un numero ci sono sempre 1 e il numero stesso.

Un numero naturale maggiore di 1, si dice *primo* se ammette come divisori *solo* se stesso e 1.

Esempio
7 è un numero *primo* perché ha come divisori *solo* 1 e 7 stesso. Qualcuno potrebbe pensare che 7 si possa dividere per esempio per 2 ottenendo 3,5 ma quest'ultimo non è un numero *naturale*. Anche 11 e 13 sono numeri *primi* perché sono divisibili solo per 1 e se stessi.

Se un numero *naturale* maggiore di 1 non è *primo* si dice *composto* e si può scrivere come prodotto di numeri primi, più esattamente si dice che si può *scomporre* in un prodotto di numeri *primi*.

Esempio
12 per quanto detto sopra è un numero composto. Infatti:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

dove 2 e 3 sono numeri primi [2].

Numeri abbondanti, deficienti (e lievemente deficienti) e perfetti

Per un numero naturale *non primo* la scomposizione della quale si è detto sopra può dare luogo a tre casi diversi:

- Il numero è *minore* della somma dei suoi divisori, includendo tra i divisori 1 ma escludendo il numero stesso.
  In tal caso il numero si dice *abbondante* (o *eccedente*), nel senso che "abbonda" di divisori, che ha molti divisori.

---

[2] Per indicare la moltiplicazione di un numero per se stesso un certo numero di volte, per esempio per indicare la moltiplicazione di 2 per se stesso tre volte, i matematici piuttosto che scrivere:

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

scrivono più sinteticamente:

$$2^3.$$

Esempio
I divisori di 12 incluso 1 ed escluso 12 sono:

$$1, 2, 3, 4, 6$$

la loro somma è:

$$1+2+3+4+6=16$$

essendo 12 minore di 16, 12 è un numero abbondante.

Esempio
I divisori di 24 incluso 1 ed escluso 24 sono:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$$

la loro somma è:

$$1+2+3+4+6+8+12=36$$

essendo 24 minore di 36, 24 è un numero abbondante.

Si lascia al lettore verificare che altri numeri abbondanti sono per esempio 18, 20, 30, 36, 40, 42 ecc.

Quanti sono questi numeri? Sono infiniti? Esiste una formula con la quale si possono ottenere?

- Il numero è *maggiore* della somma dei suoi divisori, includendo tra i divisori 1 ma escludendo il numero stesso.
  In tal caso il numero si dice *deficiente* (o *difettivo*), nel senso che "manca" di divisori, che ha pochi divisori.

Esempio
I divisori di 16 incluso 1 ed escluso 16 sono:

$$1, 2, 4, 8$$

la loro somma è:

$$1+2+4+8=15$$

essendo 16 maggiore di 15, 16 è un numero deficiente.

Esempio
I divisori di 25 incluso 1 ed escluso 25 sono:

$$1, 5$$

la loro somma è:

$$1 + 5 = 6$$

essendo 25 maggiore di 6, 25 è un numero deficiente.

Altri numeri deficienti sono per esempio: 4, 8, 9, 10, 14, 15, 21, 22 ecc.

Si può facilmente verificare che tutti i numeri *primi* maggiori di 1 (3, 5, 7, 11, 13 ecc.) sono deficienti. Infatti questi numeri sono, per definizione, divisibili solo per se stessi e per 1, dovendo escludere se stessi, resta come unico divisore 1 che è ovviamente sempre minore del numero considerato.

Anche le potenze del 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64 ecc.) sono sicuramente numeri deficienti.

Anche in questo caso ci si può chiedere quanti sono questi numeri. Esiste una formula con la quale si possono ottenere?

Tra i numeri deficienti si possono considerare in particolare dei numeri detti *lievemente deficienti o quasi perfetti*, perché maggiori della somma dei propri divisori, escluso il numero stesso ma incluso 1, *solo di una unità*.

Esempio

4 ha come divisori 1 e 2, la loro somma è 3. Essendo 4 maggiore di 3 *solo di una unità*, 4 è un numero lievemente deficiente.

Esempio

8 è un numero lievemente deficiente. Infatti i divisori di 8, escludendo l'8 stesso, sono: 1, 2 e 4. La loro somma: $1 + 2 + 4 = 7$

Essendo 8 maggiore di 7 solo di una unità, 8 è lievemente deficiente.

I numeri lievemente deficienti sono dati dalla formula [3]:

$$2^n$$

e sono quindi tutti pari [4].

Non si sa se esistono numeri *lievemente abbondanti*, cioè numeri minori della somma dei propri divisori *solo di una unità*.

- Il numero è *uguale* alla somma dei suoi divisori, escluso il numero stesso ma incluso 1.
  In tal caso il numero si dice *perfetto*.

Esempio
I divisori di 6 incluso 1 ed escluso 6 sono:

$$1, 2, 3$$

la loro somma è:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

quindi uguale al numero stesso.

È il caso di soffermarsi un po' sui numeri perfetti, perché, a nostro giudizio, sono più *curiosi*, più *strani* degli altri.

Lo studio dei numeri perfetti risale agli antichi matematici greci. I primi dieci numeri perfetti sono:

6
28
496
8128
33550336 (8 cifre)
8589869056 (10 cifre)
137438691328 (12 cifre)
2305843008139952128 (19 cifre)
2658455991569831744654692615953842176 (37 cifre)
191561942608236107294793378084303638130997321548169216 (54 cifre)

[3] Come si sa, è preferibile indicare, per generalità, un qualsiasi numero naturale usando una lettera, per esempio, la lettera n (iniziale della parola numero).

[4] Un numero naturale si dice pari se è divisibile per 2.

Si noti come questi numeri crescano rapidamente e diventino sempre più *sporadici.* Il ventesimo numero perfetto è costituito da ben 2663 cifre. Si osservi inoltre che tutti i numeri perfetti elencati e anche tutti gli altri trovati a tutt'oggi sono *pari*. Fino ad oggi nessuno è riuscito a trovare nessun numero perfetto dispari, né si sa se ne esistono.

Elenchiamo altre proprietà di cui godono i numeri perfetti:

- Ogni numero perfetto ha come ultima cifra 6 o 8. Inoltre se il numero termina con 8 la cifra precedente è 2; se termina con 6 le cifre precedenti sono: 1 oppure 3 oppure 5 oppure 7 (ciò non vale per i numeri 6 e 496). Quanto detto è subito verificabile dall'elenco di numeri perfetti prima riportato.
- Pitagora verificò che i numeri perfetti sono ottenibili dalla somma di numeri naturali tra loro consecutivi:

Esempio

$6 = 1 + 2 + 3$

$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31$

$8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + \ldots\ldots + 127$

- I numeri perfetti sono uguali alla somma di potenze consecutive di 2:

Esempio

$6 = 2 + 4$

$28 = 4 + 8 + 16$

$496 = \quad 16 + 32 + 64 + 128 + 256$

$8128 = \quad 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 + 4096$

- Sommando le cifre di un numero perfetto (ciò non vale ovviamente per il numero 6) e poi le cifre del risultato, e così via finché non si ottiene una sola cifra, il risultato è sempre 1.

Esempio

$28 \rightarrow 2+8 \rightarrow 10 \rightarrow 1+0 \rightarrow 1$

$496 \rightarrow 4+9+6 \rightarrow 19 \rightarrow 1+9 \rightarrow 10 \rightarrow 1+0 \rightarrow 1$

$8128 \rightarrow 8+1+2+8 \rightarrow 19 \rightarrow 1+9 \rightarrow 10 \rightarrow 1+0 \rightarrow 1$

- Ogni numero perfetto, tranne 6, è la somma di cubi dispari successivi:

Esempio

$$28 = 1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

L'unico numero perfetto uguale alla somma di *due* cubi è 28.

- La somma dei reciproci [5] di *tutti* i divisori di un numero perfetto, compreso il numero stesso, è sempre 2:

[5] Dato un numero naturale n (diverso da zero) il suo reciproco è $\frac{1}{n}$.

Per esempio il reciproco di 3 è $\frac{1}{3}$.

Esempi

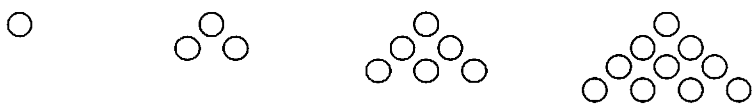
$$6 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=2$$

$$28 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{28+14+7+4+2+1}{28}=\frac{56}{28}=2$$

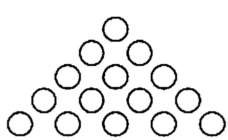
$$496 \quad \gamma \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=$$

$$\frac{496+248+124+62+31+16+8+4+2+1}{496}=\frac{992}{496}=2$$

- Tutti i numeri perfetti sono *triangolari*. I numeri *triangolari* sono numeri così chiamati perché, le loro unità, si possono disporre in modo da formare dei triangoli. Ad esempio sono triangolari i numeri: 1, 3, 6 (numero perfetto), 10, 15, 21 ecc.



1 3 6 10



15

I numeri *triangolari* sono dati dalla relazione:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

dove n è un numero naturale maggiore o uguale ad 1. Dalla relazione su scritta:

per $n = 1$ si ha: 1
per $n = 2$ si ha: 3
per $n = 3$ si ha: 6
per $n = 4$ si ha: 10
per $n = 5$ si ha: 15
per $n = 6$ si ha: 21
per $n = 7$ si ha: 28

e così via.

496 è un numero triangolare per $n = 31$
8128 è un numero triangolare per $n = 127$.

Si badi che non tutti i numeri triangolari sono perfetti. Per esempio 10 e 15 sono numeri triangolari ma non sono numeri perfetti.

Numeri amicabili

Due numeri naturali si dicono *amici* o *amicabili* o *affini* se ciascuno di essi è uguale alla somma dei divisori dell'altro, incluso 1 ed esclusi i numeri stessi.

Esempio

Sono amicabili i numeri 220 e 284:

la somma dei divisori di 220 è:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

la somma dei divisori di 284 è:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

quindi i numeri 220 e 284 sono amicabili.

Altre coppie di numeri amicabili sono:

1184 e 1210

2620 e 2924

5020 e 5564

6232 e 6368

17296 e 18416

Le coppie di numeri amicabili riportate sono tutte costituite da numeri entrambi pari. Si pensa che le coppie di numeri amicabili siano infinite. Le coppie finora trovate sono costituite da numeri entrambi pari o entrambi dispari, non si conoscono coppie costituite da un numero pari e da uno dispari. I numeri amicabili di se stessi sono numeri perfetti.

Si noti che i numeri amicabili sono necessariamente uno abbondante e uno deficiente, tranne i numeri amicabili di se stessi che sono come detto perfetti.

Numeri fidanzati

Due numeri naturali si dicono *fidanzati* se la somma dei divisori di un numero, esclusi 1 e il numero stesso è uguale al secondo e viceversa:

Esempio

La somma dei divisori di 48 è:

$$2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 = 75$$

La somma dei divisori di 75 è:

$$3 + 5 + 15 + 25 = 48$$

I numeri 48 e 75 sono quindi fidanzati. La coppia è costituita da un numero pari e da uno dispari, il primo è abbondante e il secondo è deficiente.

Le successive due coppie sono: 140 – 195 e 1575 – 1648. Siete come S. Tommaso? Non vi resta che fare la verifica.

I numeri fidanzati differiscono, quindi, dai numeri amicabili per il fatto che in questi ultimi si considera anche l'1 tra i divisori del numero.

Numeri gemelli

I numeri *primi* si presentano frequentemente in coppie della forma n e $n + 2$, cioè tali che il secondo è ottenibile dal primo sommando 2.

Per esempio:

3	e	5
5	e	7
11	e	13
17	e	19
41	e	43
59	e	61
71	e	73
101	e	103

Due numeri di questo tipo, cioè due numeri *primi* che differiscono di 2 si dicono *gemelli*. Si ritiene che di tali coppie ne esistano infinite, ma questa supposizione non è confermata da alcuna dimostrazione.

Numeri eteromechi

Sono *eteromechi* quei numeri naturali ottenuti dal prodotto di due numeri successivi.

Esempio

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$12 = 3 \cdot 4$$

$$20 = 4 \cdot 5$$

$$30 = 5 \cdot 6$$

I numeri eteromechi, come si può facilmente verificare, si ottengono dalla relazione:

$$(n - 1) \cdot n$$

oppure dalla relazione:

$$n \cdot (n + 1)$$

Poiché un numero eteromeco è dato dal prodotto di un numero per il suo precedente o per il suo successivo è quindi sempre il prodotto di un numero pari per un numero dispari, quindi i numeri eteromechi sono tutti *pari*.

Numeri bizzarri

Un numero naturale si dice *bizzarro* se è *abbondante* ma non è uguale alla somma di alcun insieme dei suoi divisori.

Esempio

12 è un numero abbondante e i suoi divisori sono:

$$1, 2, 3, 4, 6$$

essendo 12 ottenibile come somma di alcuni suoi divisori non è un numero bizzarro:

$$12 = 2 + 4 + 6$$

oppure

$$12 = 6 + 3 + 2 + 1$$

Un numero bizzarro è 70. Infatti se sommiamo i suoi divisori: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 si ha:

$$1 + 2 + 5 + 7 + 10 + 14 + 35 = 74$$

70 è quindi un numero abbondante. Quale numero o quali numeri possiamo togliere dalla somma effettuata per avere 70? Nessuno. Quindi 70 è un numero bizzarro. Quanti sono questi numeri bizzarri? Esiste una formula con la quale possiamo ottenerli?

I numeri bizzarri minori di 10.000 sono soltanto sette:

$$70, 836, 4030, 5380, 7192, 7912, 9272.$$

Numeri palindromi

Si dicono *palindromi* (o *bifronti*) quei numeri naturali che letti da sinistra a destra e da destra a sinistra hanno lo stesso valore.

Esempio

343, 101, 121, 45654 ecc.

Sono quindi palindromi quei numeri che hanno uguali le cifre estreme ed equidistanti dagli estremi, in particolare i numeri che hanno tutte le cifre uguali: 11, 222 ecc.[6]

Numeri pandigitali

Numero *pandigitale* (da "pan" che in greco significa "tutto" e "digit" che in inglese significa "cifra") è un numero naturale che nella sua rappresentazione ha tutte le cifre ripetute una volta sola, senza considerare l'ordine.

Esempio

4236780951.

è un numero pandigitale.

Altri numeri pandigitali sono: 1234567890, 9876543210.

Considerando il sistema di numerazione da noi usato, cioè il sistema di numerazione in base dieci i numeri pandigitali sono soltanto 3265920.

Se considerassimo un altro sistema di numerazione, per esempio quello in base due [7], che utilizza soltanto due simboli, due cifre 0 e 1 ci sarebbe un solo numero pandigitale: 10.

[6] Quanto detto vale anche per le parole, o le frasi intere: *afa*, *ala*, *ara*, *Anna*, *aia*, *inni*, *oro*, *otto*, *non*, *bob*, *aveva*, *ivi* sono esempi di parole palindrome. Un esempio di frase palindroma non considerando l'accento, la lettera maiuscola e gli spazi è: "è sera va a Varese".

[7] Il sistema di numerazione in base 2 o sistema binario è uno dei sistemi di numerazione utilizzati dal computer. Nel sistema binario il numero 10 si legge uno-zero e non dieci che è un termine del sistema decimale.

Numeri fortunati

Si dicono *fortunati* i numeri che si ottengono partendo dalla successione dei numeri naturali:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30……….

eliminando dei numeri nel seguente modo:
Il primo numero 1 indica di eliminare un numero sì e uno no. Rimangono i numeri dispari:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 ……..

Il secondo numero 3 indica di eliminare un numero ogni tre. Rimangono i numeri:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27 …….

Il terzo numero 7 indica di eliminare un numero ogni sette. Rimangono i numeri:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 27 ……

Si continua così eliminando un numero ogni nove e così via dicendo. I numeri che rimangono dopo questo "sterminio" sono i numeri fortunati. Non poteva trovarsi nome più appropriato. I primi 8 numeri fortunati sono: 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25.

Numeri planaci

Sono numeri naturali ottenuti sommando un numero e il suo quadrato. I numeri *planaci* [8] si ottengono dalla formula:

$$n + n^2 = n(n + 1)$$

[8] I numeri planaci, essendo dati dalla stessa formula dei numeri eteromechi, sono anche eteromechi.

La formula su scritta vale per n maggiore o uguale a 1.

Esempio

$$1 + 1 = 2$$
$$2 + 4 = 6$$
$$3 + 9 = 12$$
$$4 + 16 = 20$$
$$5 + 25 = 30$$
$$6 + 36 = 42$$
$$7 + 49 = 56$$

Numeri omogenei

Sono numeri *composti* che hanno gli stessi fattori primi.

Esempio

Consideriamo i fattori primi di 21 e di 63
Fattori di 21: 3 e 7
Fattori di 63: 3^2 e 7
Avendo 21 e 63 gli stessi fattori primi 3 e 7, sono numeri omogenei.
Anche 50 e 200 sono numeri omogenei avendo come fattori primi 2 e 5.

Si noti che nelle due coppie di numeri dati, il maggiore è un multiplo del minore, cioè 63 è multiplo di 21 e 200 è multiplo di 50.

Numeri intoccabili

Un numero naturale si dice *intoccabile* [9] se *non* è uguale alla somma dei divisori, 1 compreso ma escluso il numero stesso, di alcun altro numero naturale. Sono esempi di numeri intoccabili i numeri:

2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146, 162, 188, 206, 210

[9] Definizione dovuta al matematico Erdos.

Si noti come il 5 sia in questo gruppo l'unico numero dispari.

Quanto detto si può vedere, anche se parzialmente, dalla seguente tabella:

Numero	Divisori	Somma dei divisori
2	1	1
3	1	1
4	1, 2	3
5	1	1
6	1, 2 , 3	6
7	1	1
8	1, 2, 4	7
9	1, 3	4
10	1, 2, 5	8
11	1	1
12	1, 2, 3, 4, 6	16
13	1	1
14	1, 2, 7	10
15	1, 3, 5	9
16	1, 2, 4, 8	15
17	1	1
18	1, 2, 3, 6, 9	21
19	1	1
20	1, 2, 4, 5, 10	22
21	1, 3. 7	11
22	1, 11	12
23	1	1
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	36
25	1, 5	6
27	1, 3, 9	13
28	1, 2, 4, 7, 14	28
29	1	1
30	1, 3, 5, 6, 10, 15	40

2 *è* un numero intoccabile perché *non* è uguale alla somma dei divisori di alcun altro numero naturale

3 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 4

4 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 9

5 *è* un numero intoccabile perché *non* è uguale alla somma dei divisori di alcun altro numero naturale

6 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 25

7 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 8

8 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 10

9 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 15

10 *non è* un numero intoccabile perché è uguale alla somma dei divisori di 14
e così via.

Numeri di Harshad

Sono numeri di *Harshad* quei numeri naturali che sono divisibili per il numero ottenuto sommando le cifre del numero stesso.

Esempio

6174 è un numero di Harshad, infatti le cifre del numero considerato sono: 6, 1, 7, 4 e la loro somma è:

$$6 + 1 + 7 + 4 = 18$$

6174 è divisibile per 18, infatti:

$$6174 : 18 = 343$$

Si noti che cambiando l'ordine delle cifre non è detto che il numero sia ancora divisibile per la somma delle cifre:

$$1674 : 18 = 93$$

$$6714 : 18 = 373$$

ma

6741 e 6417 non sono divisibili per 18.

Esempio

1729 è un numero di Harshad, infatti le cifre del numero considerato sono: 1, 2, 7, 9 e la loro somma è:

$$1 + 2 + 7 + 9 = 19$$

1729 è divisibile per 19, infatti:

$$1729 : 19 = 91$$

Esempio

666 è un numero di Harshad, infatti la somma delle sue cifre è:

$$6 + 6 + 6 = 18$$

666 è divisibile per 18, infatti:

$$666 : 18 = 37$$

Esempio

999 è un numero di Harshad, infatti la somma delle sue cifre è:

$$9 + 9 + 9 = 27$$

999 è divisibile per 27, infatti:

$$999 : 27 = 37$$

Si noti che tutti i numeri composti dalla stessa cifra ripetuta tre volte sono numeri di Harshad e tutti danno come quoziente 37:

$$111 : 3 = 37$$
$$222 : 6 = 37$$
$$333 : 9 = 37$$
$$444 : 12 = 37$$
$$555 : 15 = 37$$
$$666 : 18 = 37$$
$$777 : 21 = 37$$
$$888 : 24 = 37$$
$$999 : 27 = 37$$

Si noti che sommando le cifre del numero 37 in modo da ottenere una sola cifra, il risultato è 1.

Non ci sono numeri composti da 2, 4, 5, 6, 7, 8 cifre uguali che siano numeri di Harshad. Ce ne sono a nove cifre:

$$111111111 : 9 = 12345679$$
$$222222222 : 18 = 12345679$$
$$333333333 : 27 = 12345679$$
$$444444444 : 36 = 12345679$$
$$555555555 : 45 = 12345679$$
$$666666666 : 54 = 12345679$$
$$777777777 : 63 = 12345679$$
$$888888888 : 72 = 12345679$$
$$999999999 : 81 = 12345679$$

Due curiosità:

- Il risultato è un numero composto dalle cifre da 1 a 9 (tranne l'otto) in ordine crescente.

- Sommando le cifre del numero 12345679 si ottiene 37 (il risultato della divisione dei numeri di Harshad di tre cifre uguali) sommando ancora queste cifre in modo da ottenere una sola cifra, il risultato è 1.

I prossimi numeri di Harshad composti da cifre tutte uguali avranno 27 cifre? C'è un solo modo per saperlo, provare a fare la divisione più semplice: 111111111111111111111111111: 27 e vedere se il resto è zero.

Numeri di Kaprekar

Un numero naturale di *n* cifre, si dice numero di *Kaprekar* se, dopo aver fatto il quadrato del numero, le *n* cifre di destra di questo quadrato sommate alle rimanenti cifre del quadrato stesso danno il numero considerato.

Esempio

Consideriamo il numero 45 e facciamo il suo quadrato:

$$45^2 = 2025$$

Poiché 45 ha due cifre, consideriamo le due cifre di destra di 2025 cioè 25 e li sommiamo con le cifre rimanenti:

$$25 + 20 = 45$$

come si vede si è ottenuto il numero di partenza cioè 45. Quindi 45 è un numero di Kaprekar.

Esempio

Consideriamo il numero 297 e facciamo il suo quadrato:

$$297^2 = 88209$$

Poiché 297 ha tre cifre, consideriamo le tre cifre di destra di 88209 cioè 209 e li sommiamo con le cifre rimanenti:

$$209 + 88 = 297$$

come si vede si è ottenuto il numero di partenza cioè 297. Quindi 297 è un numero di Kaprekar.

Esempio

99 è un numero di Kaprekar, infatti:

$99 \cdot 99 = 9801$

Considerando le due cifre di destra del risultato 01 e sommandole con le cifre rimanenti 98 si ha il numero di partenza 99:

$01 + 98 = 99$

Altri numeri di Kaprekar sono:

9, 55, 703, 999, 2223, 7777, 9999 ecc.

Facciamo alcune osservazioni:

1. I numeri di Kaprekar elencati sono tutti dispari.
2. Sommando le cifre di ognuno dei numeri di Kaprekar riportati, fino ad ottenere una sola cifra, la somma dà sempre 9 oppure 1.

Esempio

Sommando le cifre del numero di Kaprekar 703 si ha:

$$7 + 3 + 0 = 10$$

sommando le cifre di 10 si ha:

$$1 + 0 = 1$$

sommando le cifre del numero di Kaprekar 9999 si ha:

$$9 + 9 + 9 + 9 = 36$$

sommando le cifre di 36 si ha:

$$3 + 6 = 9$$

3. I numeri composti da soli 9 sono numeri di Kaprekar.
4. I numeri composti da soli 7 sono numeri di Kaprekar se hanno quattro, tredici (quattro + nove), ventidue (tredici + nove), trentuno

(ventidue + nove) .... cifre. In altre parole sono numeri di Kaprekar:
7777
7777777777777
7777777777777777777777
ecc.

5. I numeri di Kaprekar riportati sono tutti deficienti.
6. I numeri di Kaprekar composti da soli 9 con un numero di cifre dato da una potenza di 3 sono anche numeri di Harshad, per esempio sono numeri di Kaprekar e di Harshad: 999 e 999999999.
7. Il primo numero di Harshad con due cifre, che è anche numero di Kaprekar, è 45.

Numeri di Guiga

Sono numeri di *Guiga* quei numeri naturali per i quali la somma dei reciproci dei divisori *primi* [10] del numero, diminuita del reciproco del numero stesso, dà come risultato 1. Il primo numero di Guiga è 30. Infatti i divisori primi di 30 sono: 2, 3, 5. La somma dei reciproci di questi numeri diminuita del reciproco del numero stesso dà 1:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\gamma\frac{1}{30}=\frac{15+10+6\gamma 1}{30}=\frac{30}{30}=1$$

Il successivo numero di Guiga è 858, infatti i divisori primi di 858 sono: 2, 3, 11, 13

Quindi:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\gamma\frac{1}{858}=\frac{429+286+78+66\gamma 1}{858}=\frac{858}{858}=1$$

Come si vede i numeri di Guiga sono molto *diradati*.
Qual è il prossimo numero di Guiga?

[10] Per convenzione il numero 1 non si considera *primo*.

Congettura di Goldbach

Nel 1742 un matematico poco noto, fino ad allora, Goldbach (1690 – 1764) scoprì una cosa molto curiosa:

Ogni numero pari maggiore o uguale a 6 può essere espresso come somma di *due* numeri *primi dispari.*

Esempio

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7$

$12 = 5 + 7$

$14 = 3 + 11$

$16 = 5 + 11$

$100 = 3 + 97$

$450 = 7 + 443$

$864 = 137 + 727$

$7430 = 2833 + 4597$

Questa cosa singolare è stata verificata per un numero grandissimo di casi, ma non è mai stata dimostrata, né sono stati trovati contro e-sempi che ne provino la falsità e rimane uno dei più famosi problemi non risolto della teoria dei numeri.

Quando una proprietà è stata verificata per un numero consistente di casi e si pensa possa essere vera in generale si dice che costituisce una *congettura.*

Una *congettura* è quindi una proprietà, che si ritiene vera, ma che non si è ancora riusciti a dimostrare. In altre parole una congettura è una proprietà che si è verificata, provando e riprovando, come ogni lettore può fare, anche per un numero molto alto di casi, ma che non si sa se vale sempre.

Goldbach avanzò anche un'altra congettura che tutti i numeri dispari si possono ottenere come somma di tre numeri primi dispari.

Esempio

$$11 = 3 + 3 + 5$$

$$17 = 5 + 5 + 7$$

$$45 = 3 + 19 + 23 = 3 + 5 + 37 = 5 + 11 + 29$$

Il matematico Vinogradov ha dimostrato che tale proprietà è vera a parte un numero finito di numeri dispari.

Congettura di Collatz (o algoritmo di Siracusa)

Si consideri un qualsiasi numero naturale n, se n è pari si divida per 2, se n è dispari si moltiplichi per 3 e si aggiunga 1, si continui alla stessa maniera con il risultato ottenuto. Si verifica che da qualunque numero si parta, la sequenza delle operazioni dà sempre come risultato 1.

Esempi

$21 \rightarrow 21 \cdot 3 + 1 = 64 \rightarrow 64 : 2 = 32 \rightarrow 32 : 2 = 16 \rightarrow 16 : 2 = 8 \rightarrow 8 : 2 = 4$

$\rightarrow 4 : 2 = 2 \rightarrow 2 : 2 = 1$

$45 \rightarrow 45 \cdot 3 + 1 = 136 \rightarrow 136 : 2 = 68 \rightarrow 68 : 2 = 34 \rightarrow 34 : 2 = 17 \rightarrow$

$17 \cdot 3 + 1 = 52 \rightarrow 52 : 2 = 26 \rightarrow 26 : 2 = 13 \rightarrow 13 \cdot 3 + 1 = 40 \rightarrow 40 : 2 = 20$

$\rightarrow 20 : 2 = 10 \rightarrow 10 : 2 = 5 \rightarrow 5 \cdot 3 + 1 = 16 \rightarrow 16 : 2 = 8 \rightarrow 8 : 2 = 4 \rightarrow$

$4 : 2 = 2 \rightarrow 2 : 2 = 1$

Fra i numeri compresi fra 1 e 100 quello che ha la sequenza più lunga è 97 il quale richiede 118 passi prima di arrivare a 1 (provare per credere).

Fra 1 e 1000 il numero 763 ha una sequenza di 152 passi. È chiaro che arrivati ad 1, il procedimento si chiude su se stesso, poiché si ha la successione 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1 ecc.

Anche questa congettura, finora, non è stata dimostrata.

Si badi che quanto riportato in questo scritto costituisce soltanto la punta dell'iceberg, tante altre "*stranezze*" si possono trovare sui numeri naturali. Innumerevoli sono stati i matematici, anche di grandissima levatura, e i non matematici che nel corso dei millenni si sono dilettati a "giocare" con i numeri. Ognuno può divertirsi a verificare quanto esposto in questo lavoro e "scovare" contemporaneamente, se ne ha voglia, altre curiosità di cui godono numeri, ai quali magari attribuire il proprio cognome, come hanno fatto tante persone nel passato, senza essere necessariamente dei matematici di professione.

Se qualcuno scoprirà un numero perfetto dispari o dimostrerà che non esistono numeri di questo tipo o troverà una formula che dà tutti i numeri perfetti o un'altra formula che dà un'altra categoria di numeri, sicuramente rimarrà nel ricordo dei posteri.

Bibliografia

LUCIANO CRESCI "*I numeri celebri*" Bollati Boringhieri prima edizione 2000.

DAVID WELLS "*Numeri memorabili* – Dizionario dei numeri matematicamente curiosi" Zanichelli 1991.

SEBASTIANO NICOSIA "*Le parole della matematica*" Cedam 2001.