ANGELO PAGANO

LE LEGGI DELLA STATICA IN ARCHIMEDE

L'opera di Archimede ha fortemente influenzato lo sviluppo della scienza, in seguito alla sua riscoperta da parte di Galileo-Galilei. In questo contributo, le leggi della statica sono discusse in un'ottica di moderna Logica Matematica e relativa simbologia. La traduzione delle proposizioni della statica di Archimede in simboli di logica matematica è resa possibile dall'uso dei termini scientifici ed inequivocabili con cui Archimede descrive i suoi postulati e dimostra le proposizioni. I risultati formali così ottenuti sono applicabili anche alla teoria delle collisioni tra due corpi impenetrabili, come quella descritta nella meccanica di d'Alembert. Questa moderna interpretazione assiomatica delle regole archimedee è una chiara indicazione dell'esistenza nel lavoro del grande siracusano di un insieme completo di regole logiche la cui interpretazione reale è, coerentemente, illustrata da diversi modelli fisici.

1. Introduzione

Discutere di Archimede (287- 212 a.C.) In Memorie e Rendiconti dell'Accademia degli Zelanti e Dafnici è un'occasione unica per ricordare la centralità della posizione del conterraneo Archimede nelle scienze umane (in particolare in fisica). Il premio Nobel Alferov illustra molto bene il concetto[1]:

"*Archimede è uno degli scienziati più originali e fecondi di tutta la storia umana… Su Archimede hanno scritto pagine memorabili storici, oratori, architetti, poeti sia greci sia latini, come Polibio, Plutarco, Cicerone, Vitruvio, Virgilio. La sua fama ha continuato ad espandersi*

[1] Mario Geymonat, *Il grande Archimede*, prefazione L. Canfora - introduzione di Zhores Alferov , Ed. TETI (2008).

per tutto il Medioevo. Nel Rinascimento la riscoperta, la traduzione e l'esame approfondito delle opere di Archimede hanno dato un generosissimo impulso alla sviluppo dell'intera scienza moderna".

Sotto un aspetto più tecnico, il filosofo M. Serres spiega con cura l'essenza dell'opera archimedea[2]: "*Quello che si distacca da Aristotele è, ancora una volta, il mondo archimedeo.I piani inclinati, la statica, un'idraulica, il pre-calcolo differenziale. È proprio nell'Arenario che il mondo è eliocentrico, con l'appoggio di Aristarco... Certo, Leonardo, Galilei, Torricelli, e tutti fino a Descartes tagliano i ponti con il Medioevo e la scolastica, ma Epicuro (Democrito) e anche Archimedecostituiscono già un universo non aristotelico. No, la fisica e la meccanica scienza moderna non nascono, ad un tratto, dal nulla o dalle sollecitazioni dei contemporanei, durante il Rinascimento, esse rinascono, ecco tutto. Impiegheranno anche molto tempo per raggiungere la perfezione di Archimede… I fondatori della scienza moderna non dicono tanto di essere gli eredi di Copernico o di Galilei quanto di aver appreso il loro mestiere nell'opera di Archimede*".

In questo scritto discuteremo brevemente dell'opera di Archimede intitolata: "Sull'equilibrio dei piani o dei centri di gravità di figure piane" (libro I) (citato nel seguito con l'abbreviazione: ARCH). Il libro è in stretta connessione con la geometria delle masse, come quella sviluppata dal matematico Giuseppe Peano (1858–1932). In questa sede alcune proposizioni del libro I sono descritte usando la logica simbolica di Peano.

Definiamo brevemente cos'è un calcolo geometrico. Esso è riconosciuto da tre elementi principali:

a) Gli elementi (entità) del calcolo provengono dalla geometria euclidea (punto, linea, superficie, volume) e dalla dinamica newtoniana (massa, forze applicate, ecc ..)

b) Il calcolo viene eseguito direttamente su entità astratte (tale è un corpo idealizzato). L'introduzione di un sistema di riferimento di coordinate non è necessario. Il calcolo si dice assoluto.

c) Un sistema di regole logiche è usato per combinare gli elementi in postulati e proposizioni (teoremi)

[2] Michel Serres, *Lucrezio e L'origine della Fisica*, Sellerio ed. Palermo (2000).

Un importante esempio di calcolo geometrico fu dato da G. Peano[3] e fu poi esteso dagli studiosi della sua scuola a spazi euclidei multidimensionali[4]. Per un'attenta discussione sul lavoro di Archimede, il lettore consulti il fondamentale lavoro del Dijsksterhuis[5], nel quale leggiamo[6]: "*Il trattato sull'equilibrio dei piani occupa un posto a parte nell'opera di Archimede. Infatti, mentre in tutti i suoi trattati matematici egli si basa su elementi fondativi già introdotti prima di lui (Euclide, ecc..) , in questo lavoro egli pone se stesso come il fondatore degli elementi della statica; inoltre lascia il dominio della pura matematica per quello della scienza naturale considerata dal punto di vista della matematica: espone alcuni postulati su cui basa un capitolo dalla teoria dell'equilibrio, ed è quindi il primo a stabilire la stretta interrelazione tra matematica e meccanica, che avrebbe avuto un significato tanto vasto per la fisica e la matematica*".

Il Dijsksterhuis (1892-1965) non ha usato i simboli della logica matematica. Evidentemente, il vantaggio principale di tradurre le proposizioni di Archimede in simboli di matematica logica è dato dalla possibilità teorica di adattare la traduzione logica a diverse descrizioni fisiche, che sono suscettibili della stessa descrizione. Uno di questi esempi è dato dalla teoria delle collisioni tra due corpi impenetrabili, come illustrata nel famoso "*Trattato di dinamica*" di d'Alembert (1717-1783)[7].

2. Traduzione logica delle leggi statiche di Archimede

In questo capitolo discuteremo di alcuni postulati e proposizioni presenti nel lavoro di Archimede. Lo scopo è mostrare le potenzialità del metodo; una discussione più completa sarà fornita in una pubblicazione separata. Questo lavoro è stato ispirato dalla prima traduzione logica (a

---

[3] Giuseppe Peano, *Calcolo Geometrico*, Ed. Fratelli Bocca, Torino (1888).

[4] Vedi ad esempio: T. Boggio e C.Burali-Forti, *Espace Courbes - Critique de la Relativitè*, Soc. Tip. Ed. Naz., Torino, 1924.

[5] E.J.Dijsksterhuis, *Archimedes*, Copenaghen, (classic Work), 1956

[6] La traduzione del brano dall'Inglese all'Italiano è nostra.

[7] M. d'Alembert, *Traité de Dynamique*, (1753). Una riproduzione anastatica dell'opera si trova in Éd. Jacques Gabay 25, rue du Dr Roux 92330 Sceaux, ISBN 2-876447-064-0, 1990.

nostra conoscenza) fatta dal Prof. S. Notarrigo (n. Villarosa-Enna 1932, m. Catania 1998)[8] dell'Università di Catania, del quale chi scrive è stato allievo e poi collega per diversi anni. Il Notarrigo ha usato i simboli logici del Peano solo parzialmente e la sua traduzione è oramai non più facilmente reperibile. Si citano di seguito alcuni dei primi operatori di Peano che vengono utilizzati nella presente traduzione:

1. operatore : IF…. THEN = implicazione logica	$\supset$
2. operatore: implicazione diretta e inversa	$\supseteq$
3. operatore: ET= congiunzione logica	$\wedge$
4. operatore: EQUILIBRIO	$E_=$
5. operatore: *NON EQUILIBRIUM*:	
pendenza a destra >, pendenza a sinistra<	$E_>$; $E_<$
6. operatore: X è elemento della classe A	$X \in A$
7. Quantità misurabile	Q
8. Numero Reale	R
9. Operatore: quantificatore universale, per ogni	$\forall$
10. Moltiplicazione	*
11. Parentesi di raggruppamento	(…)
12. Separatore tra proposizioni	$\therefore$
13. Identità	$\equiv$
14. rapporto	/
15. uguale a.	=

Accanto a questi operatori, adottiamo due proprietà di base (BP.j, j = 1,2), come formalizzate dal Peano[9] e (implicitamente) usate nel lavoro di Archimede:

BP.1 Q $\equiv$ quantità

$$\forall q \in Q \therefore \forall x \in R \supset x * q \in Q$$

Leggasi: per ogni quantità q, il prodotto di essa con un qualsiasi numero reale xè ancora quantità.

[8] S. Notarrigo, *Archimede e la fisica*, Mondotre- cooperativa ''Laboratorio'' anno II-Num. 4-5 (1988).

[9] G. Peano, *Formulario Mathematico*, fac-simile original Edition 1908, Roma, Ed. Cremonese, (1960).

BP.2 proprietà di simmetria, riflessività e transitività di "uguale a..":

$$x = x \therefore x = y \supset y = x \therefore (x = y) \wedge (y = z) \supset x = z$$

Ciò premesso, In ARCH, sette postulati (Pi, i = 1,7) sono dati così come elencati nell'opera classica di Dijksterhuis. In questa nota ne useremo solo quattro: P.I, P.II, P.III, P.VI. perché questi sono sufficienti a trattare la teoria sull'equilibrio dei corpi discreti (masse concentrate o pesi):

postulati:

I - *Pesi uguali (pi, i = 1,2) (sospesi) a distanze uguali (di, i = 1,2) sono in equilibrio, e pesi uguali a distanze non uguali non sono in equilibrio, ma si ottiene pendenza verso il peso (a destra o a sinistra) che è alla maggiore distanza.*

Traduzione logica:

$$\left(\frac{p_1}{p_2} = 1\right) \supset \left\{\left[\left(\frac{d_1}{d_2} = 1\right) \supseteq E_{=}\right] \wedge \left[\left(\frac{d_1}{d_2} > 1\right) \supseteq E_{>}\right] \wedge \left[\left(\frac{d_1}{d_2} < 1\right) \supseteq E_{<}\right]\right\} \quad \textbf{P. I}$$

II - S*upposto che pesi (sospesi) a certe distanze siano in equilibrio e che un qualche peso (diverso dai precedenti) si aggiunga a uno dei pesi e rompa l'equilibrio: si ha pendenza verso quel peso a cui qualcosa è stato aggiunto.*

III - *Allo stesso modo, se qualcosa viene portato via da uno dei pesi, non si ha più l'equilibrio, ma pendenza verso quel peso da cui nulla è stato portato via.*

VI - *Se delle grandezze poste a certe distanze sono in equilibrio, altre grandezze, uguali alle precedenti saranno anche queste in equilibrio se poste alle stesse distanze.*

Traduzione logica:

$$\left[\left(\frac{p_1}{p_2} = a\right) \wedge \left(\frac{d_1}{d_2} = \alpha\right) \supset E_{=}\right] \supset$$

$$\left[\left(\frac{p_1}{p_2} > a\right) \wedge \left(\frac{d_1}{d_2} = \alpha\right) \supset E_{>}\right] \wedge \quad \textbf{P.II}$$

$$\left[\left(\frac{p_1}{p_2} < a\right) \wedge \left(\frac{d_1}{d_2} = \alpha\right) \supset E_{<}\right] \wedge \quad \textbf{P.III}$$

$$\left[\left(\frac{q_1}{q_2} = a\right) \wedge \left(\frac{d_1}{d_2} = \alpha\right) \supset E_{=}\right] \quad \textbf{P.VI}$$

Una volta stabilita la struttura formale assiomatica, l'interpretazione fisica deve trovarsi in modelli esterni tratti dal fenomeno. Ne consegue che la formulazione può essere adattata a diverse situazioni fisiche. Vedremo nel capitolo seguente un esempio pertinente, vale a dire la prima teoria sulle collisioni anelastiche di d'Alembert. Partendo dai postulati P.I... P.VI e usando le regole logiche di base è possibile provare diverse proposizioni (teoremi) sulla statica. Ne proviamo solo uno, di fondamentale importanza per il metodo della "pesata", a titolo di esempio, come segue:

Teorema o Proposizione I:

Pesi che sono in equilibrio sospesi a distanze uguali (da un comune fulcro) sono uguali.

Traduzione logica

$$\left[\left(\frac{p_1}{p_2}=a\right)\wedge\left(\frac{d_1}{d_2}=1\right)\wedge E_=\right]\supset\left[\left(\frac{p_1}{p_2}=a=1\right)\right] \qquad \textbf{Teorema. 1}$$

Si nota in questo teorema tutta l'arguzia logica del grande siracusano. Si era infatti ammesso nel postulato I che pesi uguali sospesi a distanze uguali dovevano farsi equilibrio. Ma ciò posto, nulla può assicurarci logicamente che l'osservazione di equilibrio in una bilancia a bracci uguali dia la sicurezza per l'uguaglianza dei pesi. E' necessario un teorema di logica matematica che assicuri, date certe premesse, l'uguaglianza delle masse. Ecco il teorema dimostrato:

Dimostrazione logica per assurdo:

se le due masse (o pesi) fossero disuguali (dunque, negando il teorema 1 che si vuol dimostrare), ma sospesi a distanze uguali si facessero equilibrio, togliendo dal peso maggiore la quantità di cui esso eccede rispetto al minore, si disturba l'equilibrio (che c'era prima della rimozione) a causa del postulato III. Quindi si ritroverebbe una situazione di masse uguali (per costruzione) sospese a distanze uguali che non si ritroverebbero in equilibrio contro il postulato I.

Dimostrazione logica:

posto (per assurdo) che fosse a>1, si deve scrivere:

$$\left[\left(\frac{p_1}{p_2}=(a>1)\right)\wedge\left(\frac{d_1}{d_2}=1\right)\supset E_=\ \ (ipotesi\ del\ teorema\ con\ a>1)\right]$$

Ma, togliendo massa in modo che p1=p2, si dovrebbe avere per postulato III (dal momento che si era supposto l'equilibrio):

$$\left[\left(\frac{p_1}{p_2} = (1 < a)\right) \wedge \left(\frac{d_1}{d_2} = 1\right) \supset E_<\right]$$

Ma questa proposizione è contraddetta dal postulato P. I; conseguentemente, l'aver assunto a> 1 è contro logica, e il teorema risulta provato. Evidentemente, si può ripetere la procedura per a<1. Dunque la sola possibilità logica è che sia a=1, ovvero le masse (pesi) siano uguali.

Archimede continua con la dimostrazione di altri 6 teoremi di statica. Elenchiamo semplicemente gli ultimi due: Teorema VI e Teorema VII (senza darne dimostrazione, che ovviamente si trova in Archimede e Dijksterhuis) che danno i celebri teoremi sulla leva (*datemi un punto di appoggio e vi solleverò il mondo*), del tutto impropriamente indicati in molti libri di testo e manuali come: Principii della leva.

Teorema o proposizione VI:

Grandezze (masse) tra loro in rapporto incommensurabili (nel senso proprio usato da Euclide, di rapporto razionale o rapporto tra interi) sono in equilibrio se sospesi a distanze (reciprocamente) <u>inversamente proporzionali alle loro grandezze</u>.

Teorema o proposizione VII:

Il teorema VI vale anche per grandezze che sono incommensurabili (nel senso utilizzato da Euclide di rapporti tra grandezze non esprimibili come rapporti tra interi).

Si ha sempre, per aversi equilibrio:

$$\boldsymbol{p_1 / p_2 = d_2 / d_1}$$

O in altra forma:

$$\boldsymbol{p_1 * d_1 = p_2 * d_2}$$

3. La teoria di d'Alembert sugli urti tra corpi anelastici

La teoria dell'impenetrabile (corpi solidi) è stata descritta da d'Alembert nel suo capolavoro *Traité de Dynamique*[10]. Questa teoria non è più in uso nella fisica classica perché i concetti di impenetrabilità e di corpo solido sono stati abbandonati nel paradigma moderno, che si basa sulle nozioni di "particelle di massa punto" (le particelle elementari moderne sono masse puntiformi) e "corpi rigidi" (trattati dalla moderna meccanica razionale). Le ragioni di questo cambiamento sono piuttosto complesse e, fondamentalmente, sono collegate con l'abbandono nel paradigma moderno della definizione di corpo-massa come definito da d'Alembert: «*Si deux portions d'étendu esemblables & égales entr'elles sont impénétrables, c'est-à-dire, si elles ne peuvent être immagine unies & confondues l'une avec l'autre, de manière qu'elles ne fassent qu'une même portion d'étendue moindreque la somme des deux, chacune de ces portions d'étendue sera ce qu'on appelle un Corps. L'impénétrabilité est la propriété principale par la quelle nous distinguons.*

Les Corps des parties de l'espace indéfini, où nous maginons qu'ils sont placés».

Osserviamo semplicemente che quest'ultima definizione di massa è in pieno accordo con i concetti teorici di Newton, come il prodotto tra densità e volume. Modificando l'interpretazione fisica degli elementi logici dei postulati di Archimede (ovvero facendo corrispondere una diversa possibile interpretazione fisica), siamo in grado di formalizzare la teoria delle collisioni di d'Alembert. Ad esempio, cambiando: "peso" (p) con "massa" (m) e "distanza" (d) con "velocità" (v), di conseguenza, il postulato P.I è scritto nel modo seguente:

$$\left(\frac{m_1}{m_2}=1\right)\supset\left\{\left[\left(\frac{v_1}{v_2}=1\right)\supseteq E_=\right]\wedge\left[\left(\frac{v_1}{v_2}>1\right)\supseteq E_>\right]\wedge\left[\left(\frac{v_1}{v_2}<1\right)\supseteq E_<\right]\right\} \quad \textbf{P'.I}$$

E leggiamo:

P'.I masse uguali (mi, i = 1,2) che si muovono (l'una contro l'altra) con velocità uguali (vi, i = 1,2) annullano il loro moto (dopo l'urto), e masse uguali che si muovono con velocità non uguali(l'una contro l'al-

[10] *Opera citata*

tra) non annullano il loro moto, ma si muovono (stando unite) nel verso della massa che ha la velocità maggiore (tra i due).

I postulati II, III e VI diventano:

$$\left[\left(\frac{m_1}{m_2} = a\right) \wedge \left(\frac{v_1}{v_2} = \alpha\right) \supset E_=\right] \supset$$

$$\left[\left(\frac{m_1}{m_2} > a\right) \wedge \left(\frac{v_1}{v_2} = \alpha\right) \supset E_>\right] \wedge \qquad \textbf{P'. II}$$

$$\left[\left(\frac{m_1}{m_2} < a\right) \wedge \left(\frac{v_1}{v_2} = \alpha\right) \supset E_<\right] \wedge \qquad \textbf{P'. III}$$

$$\left[\left(\frac{q_1}{q_2} = a\right) \wedge \left(\frac{v_1}{v_2} = \alpha\right) \supset E_=\right] \qquad \textbf{P'. VI}$$

noi leggiamo:

siano due masse uguali che si scontrino con certe velocità (l'una contro l'altra) in uno stato (dopo l'urto) di quiete.

P'.II - Qualcosa viene aggiunto a una delle masse: lo stato di quiete (dopo l'urto) è rotto. Le masse si muovono verso quella direzione di massa a cui nulla è stato aggiunto.

P'III. Allo stesso modo, se qualcosa viene tolto da una delle masse: lo stato di quiete è rotto. Le masse si muovono verso quella direzione di massa dalla quale qualcosa è stato portato via.

P 'VI Se le grandezze con certe velocità sono in stato di quiete dopo l'urto, anche altre grandezze (uguali alle precedenti) rimangono in quiete (dopo l'urto) con le stesse velocità.

Vediamo che la semantica equilibrio, è semplicemente reinterpretata con : centro comune di massa a riposo. Di conseguenza, I postula P'.I, P'.II, P'.III e P'.VI descrivono le collisioni (frontali) (di d'Alembert) tra due corpi impenetrabili. Le proposizioni relative alle collisioni sono dedotte (in perfetta corrispondenza con le leggi statiche sopra citate). In particolare, i Teoremi VI VII del capitolo precedente sono ora deducibili anche per le collisioni tra due corpi (solidi), ed entrambi sono riassunti in una sola proposizione (Centro di condizione di massa per l'equilibrio).

Oppure:

Il teorema assicura che l'urto tra corpi solidi conduce alla quiete se si ha uguaglianza tra le quantità di moto (prodotto di massa per velocità) dei due corpi.

4. Conclusioni

Le leggi della Statica di Archimede sono state interpretate nel contesto di una teoria logica-matematica di assoluto rigore scientifico come è quella contenuta nel"calcolo geometrico", sviluppato dal logico-matematico G. Peano. La statica archimedea, tradotta in simboli di matematica logica, rivela la sua universale validità come un sistema coerente di assiomi e teoremi che trovano applicazioni in diversi campi. In particolare in questo lavoro viene discussa la corrispondenza tra le leggi della statica di Archimede e la teoria delle collisioni anelastiche di d'Alembert tra corpi impenetrabili. Questa moderna interpretazione assiomatica è una chiara indicazione dell'esistenza nel lavoro di Archimede di un insieme completo di regole logiche la cui interpretazione reale è, coerentemente, illustrata da diversi modelli fisici.