ANGELO LIZZIO
Socio corrispondente

MATEMATICA RICREATIVA E SCIENZA

in memoria di Lucia Gionfriddo

> *"La linea che separa la matematica da intrattenimento dalla matematica seria è sottile e indistinta" (*da M. Gardner, "L'eterno fascino dei giochi matematici", 1998, pag. 98: Le Scienze n. 362)

1. Matematica ricreativa

Spesso la Matematica viene considerata come una scienza rigida, chiusa, quasi fossilizzata nei suoi metodi e nel suo aspetto. Essa è, invece, una scienza viva, che si evolve continuamente assieme all'evolversi ed al progredire di tutto il pensiero scientifico: c'è uno stretto legame tra l'evolversi del pensiero scientifico e l'evolversi della Matematica, dovuto al fatto che la Matematica rappresenta una delle strutture portanti di tutto il pensiero scientifico moderno.

Questa affermazione è confermata e convalidata dalle citazioni di molti filosofi e pensatori che hanno ben riflettuto sulla scienza. Per tutti basta ricordare Galileo Galilei, che in un passo del suo *"Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo"* (1632), intitolato "*Il Saggiatore*", afferma che il "*libro dell'universo è scritto in caratteri matematici, chi non conosce tali caratteri non potrà leggere in quel libro, ed è destinato ad aggirarsi nell'universo come in un oscuro labirinto"*.

Ad alcune persone la Matematica provoca ansia, angoscia, uno stato di disagio, dei blocchi; ciò dipende da molti fattori, non ultimo il tipo di insegnamento scolastico ricevuto. Le difficoltà incontrate in Matematica da queste persone sono dovute più alla paura che non alla mancanza di capacità.

Da studi e indagini sull'origine della fobia della Matematica emergono aspetti sorprendenti.

Viene spontaneo chiedersi: *Come funziona il cervello? In che modo si acquisisce la capacità di pensare matematicamente? Perché molte persone ritengono di non essere portate per la Matematica e la trovano ostica e difficile? Perché non si fa Matematica con la stessa facilità con cui si parla?*

A queste ed a molte altre domande Devlin Keith, docente di Matematica al Saint-Mary's College di Stanford, risponde nel suo volume "*Il gene della matematica. Per scoprire il matematico (nascosto) in ognuno di noi"*(Longanesi, Milano 2002), proponendo una nuova teoria sullo sviluppo del linguaggio, secondo la quale "*le facoltà cerebrali preposte al pensiero matematico coincidono con quelle che ci consentono di usare il linguaggio"*.

In altre parole *la capacità di pensare matematicamente non è altro che la capacità di* usare *un linguaggio*, vale a dire un mezzo per comunicare con gli altri e capire ciò che gli altri ci dicono; in realtà facciamo Matematica molto più di quanto crediamo, ma spesso non riconosciamo quando la stiamo facendo.

Altre persone invece mostrano una certa inclinazione verso la Matematica, e tra queste molte amano dedicarsi e confrontarsi alla risoluzione di problemi matematici, sia per puro passatempo, sia in forma agonistica.

Agli amanti della Matematica, considerata nel suo aspetto ricreativo, molte riviste, in vari paesi del mondo, hanno dedicato e dedicano apposite rubriche.

Particolarmente famosa è stata la rubrica "*Mathematical Games*", curata da Martin Gardner nel mensile *Scientific American*, fondato nel 1845 negli Stati Uniti e diffuso in tutto il mondo e del quale, dal 1968, esiste un'edizione in italiano distribuita nelle edicole: *Le Scienze*.

Tra le riviste italiane ci limitiamo a ricordare: *"Sapere", "Lettera PRISTEM", "Newton giochi", "Focus"*.

A livello più popolare ricordiamo il concorso il *"Quesito con la Susi*", indetto da "La Settimana Enigmistica". Tale *quesit*o ha più di cinquanta anni; la prima puntata è stata pubblicata sul n. 1052 uscito in edicola il 24 maggio 1952. Per averne un'idea riportiamo due di tali quesiti.

Quesito n. 831 “La ragazza che sa *contare* “ pubblicato nel n. 3779 del 28 agosto 2004 .

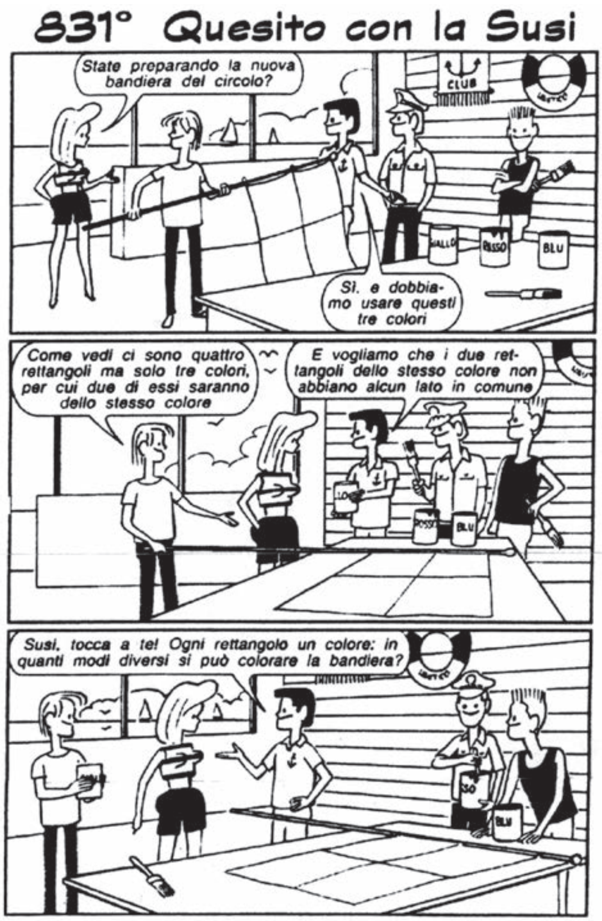


Fig. 1

<u>Soluzione</u>. *Dato che i due rettangoli dello stesso colore non devono avere lati in comune essi devono essere disposti lungo una delle diagonali. I rettangoli sull’altra diagonale saranno di colore diverso. Per ciascuna diagonale di un unico colore vi sono tre possibilità (giallo, rosso, blu) e due modi per colorare l’altra diagonale con i due rimanenti colori, in totale 6 modi. Essendo 2 le diagonali, ne viene che la bandiera può essere colorata in 12 modi diversi.*

Quesito n.870 "Quanti gradini ha la scala della scuola?" pubblicato nel n.4013 del 21 febbraio 2009.

"Susi entra in una scuola elementare dove alcune bambine sono impegnate a giocare vicino le scale. Una parola tira l'altra ed ecco che ci si chiede quanti gradini ha la scala della scuola".

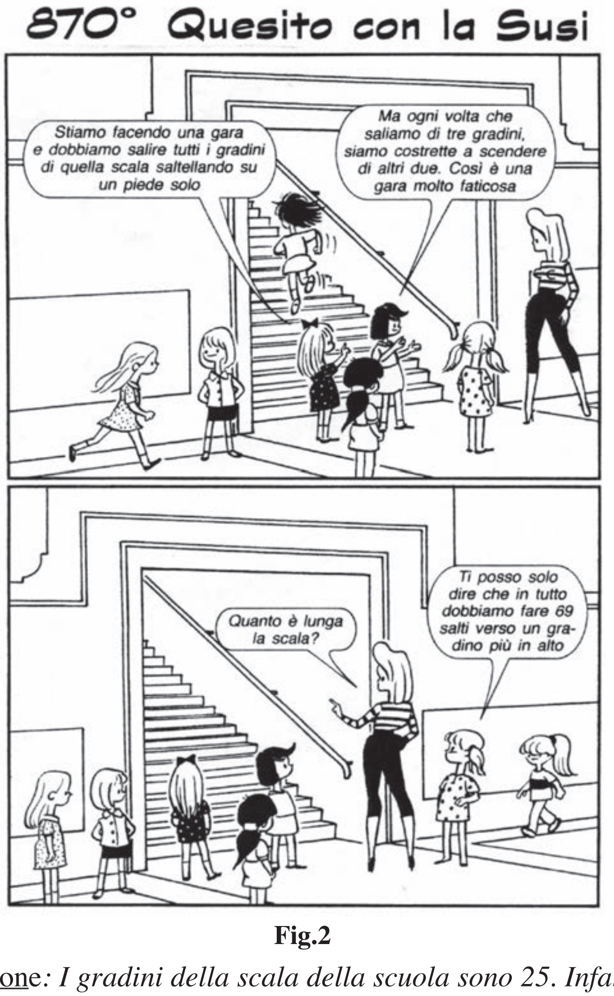


Fig.2

<u>Soluzione</u>*: I gradini della scala della scuola sono 25. Infatti ogni 3 salti si sale di un gradino,..., pertanto dopo 30 salti si è al decimo gradino,…, dopo 66 salti si è al ventiduesimo gradino, con altri 3 salti (in totale 69) si è al venticinquesimo gradino.*

2. Opere di matematica ricreativa

Molti degli incomparabili passatempi matematici proposti da Martin Gardner nella sua rubrica mensile della rivista *Scientific American* sono stati raggruppati e pubblicati, intorno agli anni 70, dalla Casa Editrice Sansoni in 5 volumetti dal titolo "*Enigmi e giochi matematici*", in seno alla collana *"Enciclopedie Pratiche*".

Nello stesso periodo il piacere per i giochi matematici si è diffuso in tutto il mondo. In particolare: in Francia, Pierre Berloquin ha curato, per circa vent'anni, la rubrica *Jeux et paradoxes* sulla rivista *Science et vie* seguita da *En toute logique* nelle pagine *Sciences et Technique* di *Le Monde*, mentre Marie Berrondo – alias Eureka – ha pubblicato settimanalmente un problema sulla rivista economica *Valeurs actuelles* e collabora alla rivista *Jeux et stratégie* dedicata a tutti i giochi della mente; in Gran Bretagna Hubert Philips – alias Caliban – ha pubblicato per molti anni una serie di enigmi matematici, sul *Daily Telegraph* e l'*Evening Standard*; in Danimarca Mogens Esrom Larsen pubblica nella rivista *Illustreret Vindenskab*.

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del successivo, si assiste ad un rinnovamento dei giochi matematici rispetto al passato. Gli autori volendosi affrancare dai problemi tradizionali, che avevano la tendenza a ripetersi, ne inventano dei nuovi e rinnovando quelli antichi li presentano in una luce completamente diversa, sotto forma di indovinelli, approfondendoli. Parecchi quotidiani e settimanali avevano una rubrica ad essi dedicata. Anche allora sono stati raccolti in volumi.

Fra i cultori di matematica ricreativa di questo periodo ricordiamo:
- l'americano Sam Loyd (1841-1911), uno dei più prolifici e creativi inventori di giochi e rompicapi; molte delle sue invenzioni furono brevettate e commercializzate con indiscutibile successo; una di queste è il gioco del 15 (esso consiste nell'ordinare in un quadrato 4x4 15 tessere numerate da 1 a 15, lasciando l'ultimo spazio a destra vuoto).
- l'inglese Henry Dudeney (1857-1930), contemporaneo di Sam Loyd, collaborò con lui scambiandosi consigli e suggerimenti a tal punto che, per molti problemi, è difficile precisare chi dei due ne è l'autore. I suoi problemi sono più matematici, ma presentati in modo sempre divertente. Pubblicò più di dieci raccolte di giochi matematici tra cui *The Canterbury Puzzles* (1907) e *Amusements in Mathematics* (1917).

- il francese Eduard Lucas (1842-1891), uno studioso di teoria dei numeri che riusciva spesso a collegare le sue ricerche specialistiche alle applicazioni ludiche. Oltre che per una *Théorie de nombres* è conosciuto per le *Récréations mathématiques (*in quattro volumi) e per una *Arithmétique amusante*; in tali opere sono riportati tutti i tipi di giochi matematici conosciuti a quell'epoca.

Andando indietro nel tempo, durante il Medioevo e il Rinascimento sono venuti alla luce varie opere di Matematica ricreativa sotto forma di raccolte di problemi e questioni matematiche. Tra queste opere, in lingua volgare, sono da segnalare: il "*De viribus quantitatis*" del francescano Luca Pacioli (1445-1510) e il "*Libro dicto giuochi matematici*" di Pietro di Nicolao, che essendo entrambi rimasti manoscritti circolarono poco e ben presto vennero dimenticati.

Per completezza diremo che il "*De viribus quantitatis*" è un manoscritto di 300 carte conservato presso la Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna e recentemente (1997) ne è stata pubblicata una trascrizione a cura di Augusto Marinoni (1911-1997) per l'Ente Raccolta Vinciana di Milano, (originalissima raccolta enciclopedica di giochi e passatempi comprendente problemi aritmetici e geometrici, indovinelli, rompicapo, giochi di prestigio, giochi di parole mediante i quali si mostra come attraverso momenti di svago e divertimento è possibile insegnare la Matematica), mentre il "*Libro dicto giuochi matematici*" è un manoscritto, del cui autore si hanno poche notizie, di 183 carte conservato presso la Biblioteca Nazionale di Firenze, dedicato a Giuliano de Medici(1479-1516), figlio di Lorenzo il Magnifico.

Il primo trattato a stampa di giochi matematici fu pubblicato nel 1612 da Gaspar Bachet de Méziriach (1581l-1638) con il titolo "*Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres*". Trattasi di una raccolta in cui figurano tutti i problemi della tradizione greco-indoaraba e dove ogni quesito viene presentato assieme a numerose varianti. Non contiene problemi davvero originali, ma è evidente una personale impronta dell'autore nella redazione delle soluzioni dei problemi. In seguito molti autori si ispireranno a questo lavoro o attingeranno molto ampiamente a questa raccolta, limitandosi spesso a modificarne leggermente gli enunciati.

3. I rompicapi di Eulero

I problemi presentati nelle rubriche per gli appassionati sono, in genere, formulati in modo originale e accattivante, essenzialmente sotto forma di giochi e di rompicapo derivanti da fatti reali.

Per quanto riguarda l'influenza dei giochi sulla matematica, va detto innanzitutto che il gioco dei dadi, oltre a introdurre nella lingua italiana i termini "*aleatorio" e "azzardo*", ha focalizzato l'attenzione *sul calcolo combinatorio* (disciplina che studia i vari modi di sistemare e scegliere certi oggetti di un dato insieme, quasi sempre finito o numerabile, secondo condizioni prefissate) ed ha dato origine *al calcolo delle probabilità*, che oggi trova applicazioni in importanti settori della vita, quali le assicurazioni e le indagini statistiche. Quest'ultimo, nonostante il suo sviluppo e il suo diffondersi, non è riuscito a debellare le false credenze sui giochi d'azzardo che ancora oggi continuano ad essere ampiamente diffuse. Sorprende il fatto che molte persone, ancora oggi, non ne comprendano i meccanismi e ne rimangano vittime.

Anche i passatempi e i rompicapi hanno avuto la loro parte nello sviluppo della Matematica. Ne considereremo due, entrambi studiati da Leonardo Eulero (1707-1783). Egli è considerato il più grande matematico del XVIII secolo ed uno dei più fecondi di tutti i tempi. La sua attività spaziò dalla Matematica pura a quella applicata, dalla Fisica alle altre Scienze. La sua opera scientifica è gigantesca e impressionante per quantità (836 tra libri ed articoli) e per ricchezza di idee.

Il primo di questi rompicapi è il cosiddetto "*Problema dei ponti di Konigsberg*", al quale seguì il "*Problema dei 36 ufficiali"*.

3.a) Il problema dei ponti di Konigsberg

La città di Konigsberg (oggi Kaliningrad), che ha dato i natali a Emanuele Kant, è una piccola città della Germania orientale, ex Prussia, tra la Polonia e la Lituania, situata sulle rive e su due isole del fiume Pregel: le varie parti della città sono collegate da sette ponti *(fig. 3)*.

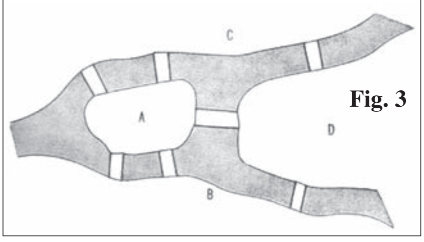


Fig. 3

Era abitudine nelle città tedesche che i cittadini la domenica passeggiassero per la città. Fu posto allora il problema: *è possibile, partendo da un punto qualsiasi della città, passare per tutte le sue zone e tornare al punto di partenza attraversando ciascun ponte una e una volta soltanto?*

La soluzione di questo problema, che aveva acquistato una certa fama e aveva cominciato a circolare fuori di Konigsberg e dai confini della Prussia, apparve nel volume del 1736 delle *Pubblicazioni dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo (Leningrado)* ad opera del matematico Leonardo Eulero, il quale dimostrò in maniera brillante che il problema non ammette soluzione.

Eulero ebbe l'idea di schematizzare la situazione con un *grafo*, ossia con una figura costituita da punti detti *vertici o nodi* e da linee chiamate *spigoli* che congiungono alcuni di questi punti. Ad ogni parte della città fece corrispondere un *vertice* e ad ogni ponte uno *spigolo* (fig. 4). Poi osservò che per l'esistenza di un *cammino*, come quello richiesto, bisogna poter "*entrare*" in ogni vertice (compreso quello di partenza) e da questo poterne "*uscire*". Perché ciò accada è *necessario che il numero degli spigoli concorrenti in ciascun vertice, detto grado del vertice*, *sia pari*. Poiché questo fatto non si verifica, la risposta al problema è negativa. Un percorso (cammino) ciclico che percorra ciascun spigolo una e una volta è oggi detto "*ciclo euleriano*" e un grafo che abbia un ciclo euleriano è detto "*grafo di Eulero o euleriano"*. Con ragionamenti analoghi ai precedenti egli provò che *la suddetta condizione è anche sufficiente*.

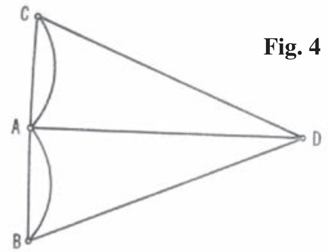


Fig. 4

Il tracciamento di linee di Eulero è un passatempo ben noto agli appassionati dei rompicapo delle riviste per i ragazzi, i quali vengono invitati a provare che un certo disegno si possa tracciare con un tratto continuo senza ripetizioni e senza sollevare la matita dal foglio.

A volte *si richiede che il cammino ricoprente tutti gli spigoli non debba ritornare al punto iniziale*. Cioè considerati due qualsiasi vertici di un grafo si vuol sapere se è possibile percorrere una sola volta gli spigoli in modo che partendo da uno di questi si arrivi all'altro. Si è provato in modo semplice *che ciò è possibile se e solo se questi due vertici sono i soli vertici del grafo di grado dispari*.

Un problema ad esso analogo fu posto nel 1859 da Sir William Hamilton il quale prese un dodecaedro regolare (ossia un poliedro avente per facce dodici pentagoni regolari, tre lati dei quali si incontrano in ciascuno dei venti vertici, fig. 5) e, associando ad ogni vertice il nome di una città famosa nel mondo, chiese: *è possibile effettuare un viaggio, partendo da una città qualunque e tornare nella città di partenza passando per ogni città una ed una sola volta?* Tale problema fu schematizzato associando al dodecaedro un grafo avente per vertici le "*città*," cioè i vertici del dodecaedro, e per spigoli gli spigoli del dodecaedro (fig. 6): si *tratta di trovare nel grafo un ciclo (se esiste) che passa per ogni vertice una ed una sola volta.* Un ciclo di questo tipo viene oggi detto "*ciclo hamiltoniano*" ed un grafo avente un ciclo hamiltoniano viene detto "*grafo di Hamilton o hamiltoniano*". Il ciclo disegnato nella fig. 6 è hamiltoniano.

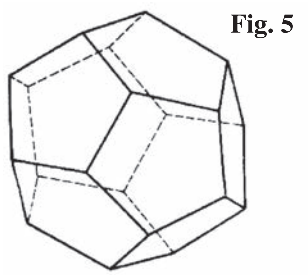
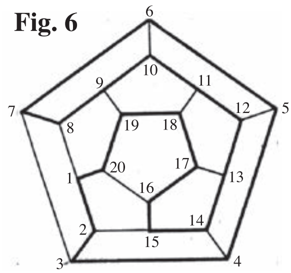


Fig. 5

Fig. 6



Chiaramente il problema anzidetto può cosi generalizzarsi: *"un commesso viaggiatore, che deve recarsi in più città, può trovare un itinerario in modo da evitare di passare più di una volta per ognuna di esse?* Così formulato esso investe più la sfera teorica che quella pratica, poiché non tiene conto della lunghezza delle strade da percorrere; inoltre il commesso viaggiatore può avere interesse a passare per le varie città nel più breve tempo oppure nel modo più economico possibile. In ogni caso si tratta di individuare, nel grafo che schematizza la situazione, *un ciclo hamiltoniano*, ossia un percorso che il commesso deve effettuare transitando una e una sola volta per ogni vertice e una sola volta o nessuna per ciascun spigolo. Nel problema di Konigsberg, invece, bisognava individuare un percorso che passasse una e una sola volta per ogni spigolo, attraversando una o più volte ciascun vertice. Nonostante la forte analogia tra i due problemi, tra di essi c'è una notevole differenza. Basti pensare, infatti, che esistono grafi euleriani ma non hamiltoniani, grafi hamiltoniani ma non euleriani, grafi sia euleriani che hamiltoniani, grafi né euleriani né hamiltoniani. Inoltre, mentre Eulero risolse immediatamente il problema dell'esistenza di un ciclo euleriano in un grafo, dando una condizione caratteristica (ossia necessaria e sufficiente) per tale esistenza, gli studi sui grafi hamiltoniani, non hanno portato alla formulazione di una regola generale che permetta di dire se un grafo è di Hamilton o no. La questione, nella sua generalità, è ancora aperta, insoluta. Sono, infatti, note condizioni che sono o solo necessarie o solo sufficienti. Una *condizione sufficiente* ma non necessaria è stata ottenuta, nel 1966, dal danese Dirac, il quale dimostrò che *se in un grafo con n vertici ogni vertice ha grado maggiore di n/2, allora il grafo è hamiltoniano*. In alcuni casi particolari, con dati molto grandi, il problema del commesso viaggiatore è stato risolto: ad esempio, è stato trovato il più breve percorso in linea aerea che collega tutte le capitali di Stato degli Stati Uniti d'America.

All'epoca di Eulero la Teoria dei Grafi, dal punto di vista matematico, non era ancora nata e i grafi venivano usati per risolvere giochi e indovinelli che servivano per divertirsi; i recenti sviluppi della matematica, non ultimi i potenti calcolatori, hanno dato un forte impulso a tale teoria, che ha assunto fisionomia e caratteristiche proprie. La Teoria dei Grafi oggi costituisce uno dei capitoli più interessanti della Matematica Discreta e viene studiata oltre che nei corsi di laurea in Matematica, in quanto strumento naturale per lo studio di certe teorie, anche in quelli di Informatica in quanto si applica a problemi di carattere molto pratico, quali quelli relativi a trasporti, a flussi in rete di tubazioni e in generale a molti problemi di programmazione. Anche la chimica organica si è interessata alla teoria dei grafi; è noto, infatti, che le strutture delle molecole organiche sono talvolta così complesse che i chimici stessi fanno fatica a descriverle, a classificarle e addirittura a dar loro un nome. L'idea che si è avuta è quella di far corrispondere a ciascuna struttura chimica una ben precisa formula di struttura (grafo) a cui associare una sequenza numerica. Le varie sequenze numeriche vengono poi analizzate da un calcolatore. I chimici ritengono che questo tentativo di schematizzazione della chimica organica permette un più facile apprendimento dei principi stessi e risolve lo spinoso problema della classificazione dei composti chimici ottenendo, tramite calcolatore, in modo molto facile e spedito, le diverse informazioni chimiche e fisiche sui vari composti.

Semplificazioni matematiche dello stesso genere si avranno, fra non molto, nel campo della biologia molecolare, della genetica chimica e in altri campi ancora più complessi.

3.b) Il problema dei 36 ufficiali

Negli ultimi anni di vita, nella sua memoria "*Recherches sur une nouvelle espèce de quarres magiques*", Eulero disserta su una nuova specie di quadrato magico, detta *quadrato latino*. Un quadrato latino di ordine n è una sistemazione nelle n^2 caselle di una matrice quadrata nxn di n simboli distinti in modo tale che ogni simbolo compaia una e una sola volta in ogni riga e una e una sola volta in ogni colonna. Aggiungendo la stessa condizione sulle diagonali, il quadrato latino diventa un *quadrato magico*. Se sovrapponendo due quadrati latini, le n^2 coppie di simboli che si ottengono appaiono ciascuna una sola volta il quadrato così ottenuto si dirà *greco-latino* (il nome deriva dall'abitudine che Eulero ebbe nell'usare come simboli le lettere dell'alfabeto latino nel primo quadrato e le lettere dell'alfabeto greco nel secondo quadrato) e i due quadrati sono detti *ortogonali*.

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

a α	b β	c γ	d δ
b γ	a δ	d α	c β
c δ	d γ	a β	b α
d β	c α	b δ	a γ

Fig 7 Il terzo quadrato (greco-latino) si ottiene sovrapponendo i precedenti due (latini)

A quell'epoca fu facile dimostrare che *non esistono quadrati greco-latino di ordine 2*, mentre erano conosciuti quelli di ordine 3,4,5. Eulero si pose il problema se esistessero quadrati *greco-latini di ordine 6*, dando origine al famoso "*problema dei 36 ufficiali",* che cosi formulò:

"*In una parata in cui intervengono 6 reggimenti, vengono scelti 6 ufficiali di grado diverso per ciascun reggimento (sottotenente, tenente, capitano, maggiore, tenente colonnello, colonnello). È possibile dispor-*

re questi 36 ufficiali, formando un plotone quadrato 6x6 in modo che in ogni riga e in ogni colonna non si trovino mai due ufficiali dello stesso grado e dello stesso reggimento?"

Tale quesito trae origine da quello delle 16 carte presente nei "*Problèmes plaisants et délectables*" che Bachet de Mèziriach così formulò:

"*È possibile disporre gli assi, i re, le regine, ed i fanti di un mazzo di carte in quadrato, in modo che in ogni riga e colonna figurino i quattro valori ed i quattro semi?"*

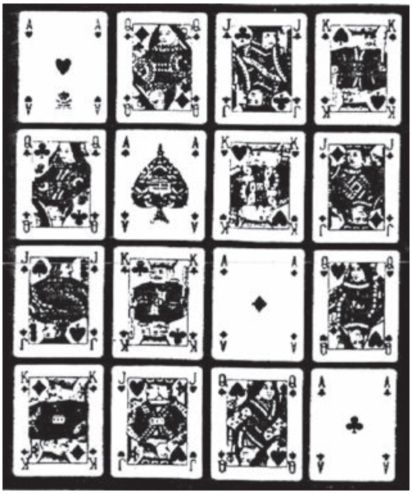


Fig. 8

La fig. 8 rappresenta una possibile soluzione di tale problema.

Un anno prima di morire, ormai cieco, Eulero affrontò il problema, degli n^2 ufficiali, in generale, dimostrando che esso può essere risolto se n è dispari oppure è doppiamente pari (cioè n divisibile per 4). Il caso dei numeri semplicemente pari, cioè dei numeri che come il 2 e il 6 sono divisibili per 2 e non per 4 rimaneva aperto. Constatato che il caso n=2 non ammette soluzioni, affrontando il caso n=6 sulla base di diversi tentativi egli formulò la seguente congettura: "*È impossibile risolvere il problema degli n^2 ufficiali per n=6 e per tutti i numeri n semplicemente pari"*. Dopo 120 anni circa, nel 1901, il matematico francese Gaston Tarry, confermò la suddetta congettura; egli infatti, aiutato dal fratello, elencò tutti i possibili modi di costruire un quadrato latino di ordine 6, e fece poi vedere che nessuna coppia avrebbe formato un quadrato greco-latino. Successivamente, nell'aprile del 1959, alla riunione della Società Americana di Matematica i matematici E.T. Parker, R.C. Bose e S.S. Shirikhande provarono che la *congettura di Eulero è falsa per tutti numeri semplicemente pari maggiore di 6* .

La fig. 9 rappresenta un tentativo di risoluzione del problema dei 36 ufficiali: non è possibile sistemare le 2 carte in basso a destra nei due posti liberi, in modo che non vi siano ripetizioni di “simbolo” o di “lettera” ossia di “reggimento” o di “grado”..

Fig. 9

Ci sono voluti circa 180 anni di studi per smontare la congettura di Eulero: gli studi compiuti, però, hanno contribuito alla nascita e allo sviluppo di *nuove strutture combinatorie*, che hanno permesso di costruire un numero infinito di quadrati latini la cui esistenza era ritenuta prima impossibile.

Tony Phillips e Stony Brook, in una accurata presentazione dei quadrati *latini e greco-latini* sul sito della AMS, American Mathematics Society, hanno mostrato come questi quadrati potessero essere utilizzati in statistica per progettare ed organizzare test ed esperimenti in vari campi delle scienze applicate (vedi agricoltura, biologia, medicina, sociologia, economia, ecc…), dandone la migliore rappresentazione grafica.

Il primo a mostrare, intorno al 1920, come questi quadrati potessero essere usati nella ricerca agricola fu Sir Ronald Fisher.

Diamo di seguito un’applicazione dei sopradetti quadrati latini e greco-latini in agronomia.

Supponiamo di voler tastare la resa di 5 varietà di grano. Possiamo seminare ciascuna varietà di grano su un campo e, a raccolto avvenuto, misurarne la produzione per unità di area. In questo modo saremmo obbligati ad eseguire 5 esperimenti su 5 campi diversi, le cui caratteristiche difficilmente potrebbero essere uniformi (per la diversa fertilità del suolo, per la diversa esposizione, ecc…..). Se invece dividiamo un unico campo in 5x5 parti nelle quali effettuiamo la semina secondo *lo schema di un quadrato latino*, potremo avere, con notevole economia di tempo e di denaro, un test più attendibile sulla resa della coltura delle 5 varietà di grano considerate.

La precedente applicazione si estende facilmente ai quadrati latini ortogonali. Infatti, se si vuole sperimentare anche l'effetto di 5 fertilizzanti differenti sulla resa delle cinque varietà di grano, cioè vedere come ogni fertilizzante agisce su ciascuna varietà di grano, la migliore rappresentazione grafica di tale esperimento si ha utilizzando due quadrati latini ortogonali. Questi, grazie alla proprietà di ortogonalità, garantiscono che ogni coppia (grano, fertilizzante) si ritrovi contemporaneamente ad essere esaminata una e una sola volta.

4. Quadrato magico perfetto

Un quadrato magico perfetto è un quadrato in cui ciascun lato è suddiviso in n parti, in modo che tutto il quadrato sia composto da n^2 celle, dove vanno disposti *opportunamente* i naturali 1,2, …..n^2. *Opportunamente* significa che la somma dei numeri inseriti in una colonna, o in una riga, o in una diagonale qualsiasi sia sempre la stessa. Questa costante è associata al quadrato magico ed è uguale a $(n^3+n)/2$. L'ordine di un quadrato magico è il numero delle celle su uno dei suoi lati. Per n=3 è stato provato che l'*unica* disposizione possibile, non considerando le rotazioni e le simmetrie, è quella indicata in fig. 10.

Essa è chiamata "*Lo Shu*" ed ha avuto una lunga storia come amuleto. Ancor oggi è rappresentata in amuleti indossati nel lontano Oriente e in India.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 10

Se anziché considerare i primi nove numeri si considerano i primi sedici, cioè per n=4, si dimostra che questi si possono disporre in 880 modi differenti (a parte le rotazioni e le simmetrie) in modo da ottenere dieci gruppi di quattro numeri aventi tutti lo stesso numero come somma. Una documentazione relativa al quadrato indicato in fig. 11 è stata trovata a Khajuraho in India e risale al XI o XII secolo.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Fig. 11

Un quadrato magico di ordine 4 può essere costruito con il seguente procedimento abbastanza semplice: si scrivano prima i numeri da 1 a 16 come in fig. 12 e poi si scambino tra loro i numeri posti sulle diagonali simmetricamente rispetto al centro, fig. 13.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 12

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fig. 13

Osserviamo che il quadrato così ottenuto è assai *più magico* di quanto sia richiesto dalla definizione. Infatti esistono in esso molti gruppi di quattro celle (oltre le righe, le colonne e le diagonali) che danno come totale 34 (cioè la costante del quadrato del quarto ordine). Per esempio, i quadrati di due per due d'angolo, le quattro celle d'angolo, le quattro celle centrali.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fig. 14

Inoltre tale quadrato è detto *simmetrico* perché la somma di due qualsiasi numeri disposti simmetricamente rispetto al centro è sempre 17.

Uno di questi quadrati più magici e simmetrici appare nella famosa incisione intitolata "*La Malinconia*" (fig.15) del pittore e incisore, matematico tedesco, Albrecht Durer (Norimberga, 1471 -1528). Egli è considerato il massimo esponente della pittura tedesca rinascimentale; interessanti sono i suoi lavori scientifici e artistici sulla prospettiva.

Fig. 15: La "Malinconia" di Albrecht Durer. In alto a destra il quadrato magico

Trattasi del quadrato ottenuto da quello della figura 13 scambiando le due colonne centrali (il che non cambia le sue proprietà) in modo che le due celle centrali della riga inferiore indicassero l'anno in cui fu fatta l'incisione, il 1514 (fig. 16).

Fig. 16

Durer non ha spiegato il ricco simbolismo contenuto in questo capolavoro, ma la maggior parte dei competenti sono d'accordo sul fatto che rappresenti lo stato d'animo depresso del pensatore incapace di passare all'azione.

In tale incisione gli strumenti scientifici e di carpenteria giacciono inutilizzati al suolo attorno alla figura disordinata e meditabonda della Melanconia. I piatti della bilancia sono vuoti, nessuno sale sulla scala, il cherubino alato aspetta la dettatura, mentre il tempo passa nella clessidra in alto. La sfera e il poliedro, curiosamente troncato, suggeriscono la base matematica del costruire. Apparentemente la luce è soffusa di riflesso lunare. L'arcobaleno lunare, che si incurva su ciò che sembra essere una cometa, può significare la speranza che lo stato di abbattimento passi.

Questi quadrati con sedici numeri furono collegati dagli astrologhi del Rinascimento a Giove e si credeva che combattessero la malinconia. In tale periodo, infatti, il temperamento malinconico era ritenuto una caratteristica del genio creativo, era la malattia degli studiosi "*che una pallida maschera di pensiero fa sembrare ammalati*".

Questo può spigare il quadrato nell'angolo alto a destra nell'incisione.

Ancora oggi è vivo fra noi il concetto che gli intellettuali sono incapaci, come Amleto, di prendere delle decisioni.

5. Sudoku

Oggi i quadrati numerici sono tornati di moda e dalla Matematica pura e applicata si è ritornati al gioco, il *Sudoku*. Questo gioco, nato negli Stati Uniti nel 1984, è diventato molto popolare in Giappone e, dopo aver transitato per Londra, dall'estate del 2005 si sta diffondendo ogni giorno di più anche in Italia.

Ogni *Sudoku* consiste in una griglia di 9 righe orizzontali e 9 colonne verticali, ulteriormente suddivisa in 9 riquadri di 9 caselle ciascuno (fig.17). In alcune caselle sono già inserite delle cifre. Scopo del gioco è riempire le caselle vuote con una cifra compresa tra 1 e 9, in modo tale che nelle singole righe, colonne e riquadri del diagramma ogni numero compaia una sola volta.

9							3	
	6		7				5	
	1	8						
					2	5		
1			3	9				
		3	8		1	2		
4	9		6			7		
6		2	9	8				1
						6		9

Fig. 17

In realtà si tratta di un gioco che chiunque voglia può risolvere. Non servono particolari nozioni matematiche, ma solo conoscere le cifre e collocarle in una griglia in modo tale che non si ripetano; per completare lo schema basta usare la logica. Il *Sudoku* ormai è presente sulle pagine di quotidiani, settimanali e riviste specializzate: è un gioco che ha coinvolto giovani e meno giovani, chi da sempre ha una propensione per le scienze esatte e chi, ha cercato di cancellare i numeri dalla sua vita.

Nell'esempio della fig. 17, il 9 che deve figurare nella terza colonna va posto nella quarta riga; mentre il 9 della sesta colonna può essere posto nella seconda o terza riga, ….

6. Conclusioni

Concludendo ritengo che i vari problemi (elementari e apparentemente semplici), i quesiti, e giochi ingegnosi esposti con le loro soluzioni, eleganti e allo stesso tempo sorprendenti, capite e apprezzate anche dai non matematici, siano sufficienti a dare un'idea di come la matematica ricreativa, che nel tempo è entrata sempre più nella vita sociale e culturale, abbia influito notevolmente con le sue applicazioni sullo sviluppo della Matematica e della Scienza in generale, dandone un forte impulso e promovendo nuove teorie.

Bibliografia:

Bell E.T., I grandi Matematici, Sansoni, 1950

Berge C., Théorie des garphes et ses applications, Dunod, 1963

Boyer C.B., Storia della Matematica, Isedi, 1976

Criton M., Les jeux mathématiques, PUF. 1998

Harary F., Graph Theory, Addison-Weshley, 1969

Gardner M., Enigmi e giochi matematici, Sansoni, 1972

La settimana enigmistica quesito con la Susi n. 831 "*La ragazza che sa "contare"* pubblicato nel n. 3779 del 28 agosto 2004

La settimana enigmistica quesito con la Susi n. 870 "*Quanti gradini ha la scala della scuola*?" pubblicato nel n. 4013 del 21 febbraio 2009.

Ore O., I grafi e le loro applicazioni, Zanichelli, 1983.